

УДК 621.763:004

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МЕХАНИЧЕСКОГО СПЛАВЛЕНИЯ В ШАРОВЫХ МЕЛЬНИЦАХ

Часть II. Расчет контактной площадки между мелющими телами и времени удара*

Е. В. ШЕЛЕХОВ, Т. А. СВИРИДОВА

МИСиС

Разработана физическая модель механоактивационной обработки для планетарной мельницы с шаровой загрузкой, в которой объединены представления Герца о чисто упругом ударе с представлениями Мориса-Кортни о чисто пластическом ударе, т. е. совершен переход к упругопластической деформации при ударе. В данной модели переход от упругого удара к пластическому происходит, если нормальное упругое напряжение достигает значения твердости обрабатываемого материала, а вязкость пластического течения порошка ограничивает величину сдвиговой деформации при тангенциальном ударе.

Введение

Данная статья является II частью серии статей, посвященных разработке физической модели механоактивационной обработки для планетарной мельницы с шаровой загрузкой или квазицилиндрическим мелющим телом. Предлагаемая модель объединяет представления Герца (см., например, в [1]) о чисто упругом ударе с представлениями Мориса и Кортни [2] о чисто пластическом ударе, т. е. деформация при ударе рассматривается как упругопластическая. Размер контактной площадки между мелющими телами и время удара важны для расчета механических частот [3] (интенсивности пластической деформации) и определения теплопереноса от мелющих тел к стенке барабана.

Конечной целью данной работы является расчет параметров упруго-пластического удара, при котором введенный ранее [3] коэффициент упругости лобового (центрального) удара η перестанет быть константой и превратится в функцию скорости столкновения, упругих свойств порошка и шаров, твердости порошка, толщины слоя порошка и радиуса шаров.

Предполагается, что до некоторой критической скорости столкновения (разной для ударов "шар-шар" и "шар-стенка") центральный удар остается чисто упругим. Однако даже для ударов, у которых нормальная компонента скорости ниже критического порога, теплота все равно выделяется при наличии касательной компоненты скорости, так как шары теряют кинетическую энергию в результате трения (заметим, что коэффициент трения для неокисленных металлических поверхностей может быть близким к 1).

Предполагается, что шары и стенка барабана равномерно и однородно покрыты (футерованы) слоем компактированного порошка толщиной h , которая может быть определена исходя из параметра загрузки барабана δ — отношения объемов порошка и шаров:

$$\frac{h(4\pi R_b^2 N + 4\pi R_{Vi} R_b)}{\frac{4}{3}\pi R_b^3 N} = \delta \text{ или } h = \delta \frac{R_b}{3f}, \quad (1)$$

где $f = 1 + \frac{R_{Vi}}{NR_b}$; N — число шаров в одном слое;

$D_b = 2R_b$ — высота модели (в плоской модели рассматривается один шаровой слой, и высота барабана равна диаметру шара, общее же число

* Часть I статьи опубликована в журнале "Материаловедение" № 9, 10, 2007 г.

слоев равно L_V/D_b ; L_V — истинная высота ба-
рабана). Используемое на практике отношение
массы порошка и шаров может быть вычислено

как $m:M = \delta \frac{\rho_p}{\rho_b}$, где ρ_p и ρ_b — плотности по-

рошка и шаров. Заметим, что h — полутолщина
слоя порошка, подвергающегося ударам, пол-
ная же толщина $H = 2h$.

Упругие напряжения, развиваемые при уда-
ре, пропорциональны радиусу контактной пло-
щадки r_0 , и глубина их проникновения в мате-
риал также порядка r_0 . Пока упругие напряже-
ния не выходят за пределы полуслоя порошка
толщиной h и не превосходят значения твердо-
сти порошка H_V , удар остается герцевским и
чисто упругим. Когда упругие напряжения про-
никают в материал шара (по мере сближения
шаров и роста r_0), но не превышают порог пла-
стической деформации H_V , удар также остается
упругим, но для его описания мы вынуждены
прибегать к псевдогерцевскому приближению,
так как упругая среда становится гетерогенной,
а упругие свойства шара и порошка могут силь-
но различаться. Значение твердости H_V являет-
ся верхним пределом для развиваемых при уда-
ре напряжений, если пренебречь дополнитель-
ным сопротивлением вязкого течения обраба-
тываемого материала, которое увеличивается с
ростом скорости деформации (удара). Когда
среднее по контактной площадке нормальное
напряжение достигает значения H_V , начина-
ется пластическая деформация, т. е. начинает
образовываться пластическая лунка деформации
от идентора-шара. Работа пластической дефор-
мации равна неупругим потерям за счет нор-
мальной компоненты скорости удара.

Общепринятым считается [4], что пластиче-
ская деформация металлов является термиче-
ски активируемым процессом, таким, что ско-
рость сдвига $\dot{\lambda}$ связана с касательным напря-
жением σ в действующей системе скольжения

уравнением Аррениуса: $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_0 e^{\frac{v^* \sigma}{k_B T}}$, где k_B —
константа Больцмана; T — абсолютная темпе-
ратура; v^* — активационный объем. Из-за бли-
зости σ в различных системах скольжения в
пределах контактной зоны вся эта зона одно-
временно переходит в "текущее" состояние.
Другими словами, предполагаем, что касатель-
ная компонента удара начинает давать вклад в

пластическую деформацию порошка в кон-
тактной зоне, приводя к чистому боковому
сдвигу, лишь тогда, когда материал уже "по-
плыл" в результате достижения нормальным на-
пряжением значения H_V . Обычно наблюдается

степенная зависимость σ от $\dot{\lambda}$, т. е. $\sigma = \eta(\dot{\lambda})^m$.
В рамках этой статьи мы предполагаем про-
стейшую прямо пропорциональную зависи-
мость $\sigma = \eta \dot{\lambda}$, т. е. степень $m = 1$, хотя приво-
димые ниже формулы (2)—(4) нетрудно обоб-
щить на случай произвольной m . При $m = 1$ ко-
эффициент η приобретает смысл и размерность
вязкости, т. е. материал порошка ведет себя
как вязкая жидкость, характеризуемая опреде-
ленным значением вязкости η (не путать с уп-
ругостью лобового удара). В случае если не про-
исходит отрыва порошка от шаров или про-
скальзывания двух полуслоев порошка друг по
другу, градиент скорости вязкого течения мате-
риала в контактной зоне между жерновами-ша-
рами равен скорости сдвига, т. е. $\dot{\lambda} = \dot{v}_\tau/H$, где
 \dot{v}_τ — относительная тангенциальная скорость
поверхностей соударяющихся шаров. Макси-
мальное касательное напряжение, которое мож-
но передать порошку, равно предельно достижи-
мому нормальному напряжению H_V умножен-
ному на коэффициент трения ξ . Отсюда условие
прилипания порошка к шарам и отсутствие от-
рыва на границе полуслоев порошка, т. е. усло-
вие передачи касательной пластической дефор-
мации в контактную зону, принимает вид:

$$\eta \dot{v}_\tau / H \leq \xi H_V, \quad (2)$$

откуда

$$\dot{v}_\tau^{\max} = \xi H / \tau_v, \quad (3)$$

где $\tau_v = \eta / H_V$ — "вязкое время" (величина,
имеющая размерность времени и характери-
зующая вязкость порошка при его пластиче-
ском течении). Если условие (2) не выполняется,
то сопротивление вязкому течению слиш-
ком велико и происходит отрыв. Если t_p — вре-
мя пластической стадии удара (пока
нормальное напряжение равно H_V), то из (3)
следует, что максимально возможный сдвиг
контактной зоны за счет касательной компо-
ненты скорости удара

$$\lambda_{\max} = \frac{\dot{v}_\tau^{\max} t_p}{H} = \xi \frac{t_p}{\tau_v}. \quad (4)$$

Сдвиги в контактной зоне происходят и под действием нормальной компоненты скорости удара. Например, в случае чисто пластического удара двух шаров глубина пластической лунки, оставленной в слое компактированного порошка каждым из шаров, меняется в зависимости от расстояния до оси удара r (рис. 1) и по закону

$$x(r) = x_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где

$$x_0 = \frac{r_0^2}{2R_b}; \quad (6)$$

r_0 — максимальный радиус контактной зоны, объем которой $V_{cz} = \pi r_0^2 H$. Отсюда нормальная пластическая деформация $\varepsilon(r) = x(r)/h$, т. е. в отличие от касательной деформации (4) она зависит от r и должна усредняться по объему контактной зоны. Эта деформация может быть разложена на $n \geq 3$ перемежающихся (идущих мелкими чередующимися порциями) сдвигов суммарной величиной $2\varepsilon(r)$ в n системах скольжения, наклоненных под 45° к оси удара. Как было показано в ч. I статьи [3], величина пластической деформации (сдвига) при единичном ударе и частота этих ударов важны при оценке кинетики механоактивации и механосинтеза. Сам по себе объем пластической контактной зоны V_{cz} также важен, так как показывает приблизительный объем материала, вовлекаемого в пластическую деформацию при единичном ударе.

Расчет глубины пластической лунки x_0 и связанного с ней соотношением (6) радиуса пластической контактной площадки r_0 в зависимости от относительной скорости сталкивающихся шаров, насколько нам известно,

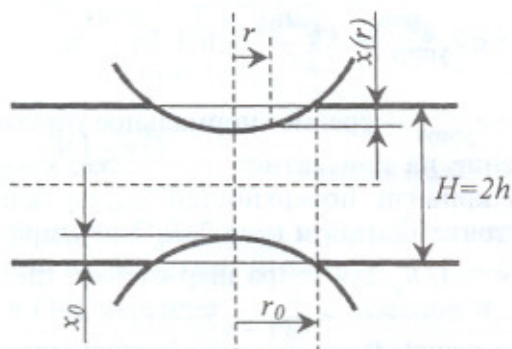


Рис. 1. Схема параметров пластической лунки

впервые был выполнен Морисом и Кортни [2]. Ввиду важности этого результата и труднодоступности оригинальной работы (диссертации) приводим наш вариант расчета.

При погружении каждого из шаров в материал на глубину x текущий радиус контактной площадки $r = \sqrt{2xR_b}$. Давление под шаром $p = \frac{2}{3} H_V$, где H_V — твердость материала; коэффициент $\frac{2}{3}$ введен для соответствия конечной формулы выражению Мориса и Кортни (в нашем подходе $p = H_V$, что эквивалентно повышению твердости в 1,5 раза). Уравнение движения шара в системе центра масс двух шаров есть уравнение гармонического осциллятора:

$$M\ddot{x} = -\pi r^2 p = -\frac{4}{3} \pi R_b H_V x \quad (7 \text{ а})$$

или

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad (7 \text{ б})$$

где $M = \frac{4}{3} \pi R_b^3 \rho_b$ — масса шара; $\omega = \frac{c_V}{R_b}$;

$c_V = \sqrt{\frac{H_V}{\rho_b}}$ — "скорость Виккерса". При $H_V = 2$ ГПа и стальном шаре $c_V = 500$ м/с.

Поскольку в момент времени $t = 0$ имеем $x = 0$ и $\dot{x} = v/2$, где v — относительная нормальная скорость шаров, то шар движется по закону $x = x_0 \sin \omega t$, где

$$2x_0 = \frac{v}{\omega} = R_b \frac{v}{c_V}. \quad (8)$$

Здесь $2x_0$ — максимальное сближение пары шаров, пластическая усадка материала. Соответственно, максимальный радиус пластической контактной площадки

$$r_0 = R_b \sqrt{\frac{v}{c_V}}. \quad (9)$$

Таким образом, максимальная глубина погружения шаров в слой порошка $x_0 \sim v$, а максимальный радиус пластической контактной площадки $r_0 \sim \sqrt{v}$.

Этот абсолютно неупругий удар длится четверть периода, т. е. $0 \leq \omega t \leq \pi/2$, откуда время пластического удара

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \frac{R_b}{c_V}, \quad (10)$$

причем это время не зависит от скорости соударения. При падении шара на стенку с нормальной скоростью v имеем $x_0 = R_b \frac{v}{c_V}$;

$r_0 = R_b \sqrt{2 \frac{v}{c_V}}$; t_0 , по-прежнему, определяется соотношением (10).

Как будет показано ниже, учет вязкости при нормальном ударе приводит к уменьшению пластических контактных площадок.

Для сравнения приведем герцевское время абсолютно упругого удара двух шаров

$$t_0 = 6,4 \frac{R_b}{c_{\parallel}^{0,8} v^{0,2}}$$
 и герцевский радиус контактной площадки $r_0 = R_b \left(\frac{v}{c_{\parallel}} \right)^{0,4}$, где $c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E_p}{\rho_b}}$ —

аналог продольной скорости звука; E_p — модуль Юнга компактированного порошка.

При упругопластическом подходе контактные площадки и времена ударов будут отличаться и от чисто пластических, и от чисто упругих. Расчет этих величин важен не только для последующей оценки кинетики механосинтеза, но и для определения температуры мелющей среды, так как один из каналов отвода теплоты ударов из барабана наружу — контактный. При столкновении горячего шара с холодной стенкой последней передается (помимо половины теплоты

удара) теплота $\Delta Q = \Delta T S_0 \sqrt{\frac{B_p t_0}{\pi}}$, где $S_0 = \pi r_0^2$ —

площадь контактной площадки; ΔT — разность температур шара и стенки; B_p — параметр теплоотвода (произведение теплопроводности и объемной теплоемкости) для компактированного порошка; t_0 — время теплового контакта (время удара). Таким образом, $\Delta Q \sim S_0 \sqrt{t_0}$.

В заключение этого введения заметим, что пластическая сила сопротивления движению шара (или вообще произвольного по форме индентора) $F = H_V S$, где S — площадь горловины пластической лунки. Отсюда работа пластической деформации

$$A = \int F dx = H_V \int S dx = H_V V, \quad (11)$$

где V — объем пластической лунки. Так что при чисто пластическом ударе всю кинетическую энергию шара E нужно приравнять $H_V V$, откуда можно найти объем лунки V , а соответственно, r_0 и x_0 . При использовании феноменологического и постоянного параметра упругости лобового удара η следует написать $E(1 - \eta) = H_V V$, т. е. считать, что только постоянная часть $1 - \eta$ кинетической энергии шара E безвозвратно затрачивается на пластическую деформацию, а часть η уходит на упругую деформацию слоя порошка и шара и при отскоке возвращается шару. Иначе говоря, в таком приближении можно рассчитывать параметры абсолютно неупругого пластического удара, включая и время удара t_0 , исходя из предположения, что нормальная скорость шара до столкновения была не v_n , а $v_n \eta_2$, где $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta}$. Такой подход можно назвать "псевдопластическим приближением". Однако упругопластический подход, к изложению которого мы и переходим, является более последовательным.

Упругопластический удар

Недостатком псевдопластического подхода является то, что пластическая деформация начинается при сколь угодно слабых ударах, т. е. при сколь угодно малых скоростях столкновения шаров, тогда как на самом деле до некоторой критической скорости удар остается чисто упругим, т. е. существует упругий предел скорости столкновения.

Если контактная площадка равномерно нагружена (нет значительного распределения напряжений на ней) и радиус контактной площадки r_0 удовлетворяет приближенному соотношению $1,3r_0 < h$, то упругие напряжения не выходят за пределы слоя порошка, т. е. не проникают в шар или стенку барабана, а значит, должно выполняться соотношение Герца

$$\langle \sigma \rangle_{\text{упруг}} = K \frac{\kappa}{2} \frac{r_0}{\theta_p} \text{ при } 1,3r_0 < h, \quad (12)$$

где $\langle \sigma \rangle_{\text{упруг}}$ — среднее нормальное упругое напряжение на контактной площадке; κ — разность кривизн поверхностей соударяющихся тел в точке контакта ($\kappa = 2/R_b$ для удара шар-шар; $\kappa = 1/R_b$ для удара шар-стенка, где R_b —

радиус шара); $\theta_p = \frac{4(1 - \nu_p^2)}{E_p}$ — упругая подат-

ливость порошка (p — powder); ν_p и E_p — коэффициент Пуассона и модуль Юнга компактированного порошка; K — безразмерный коэффициент (вероятно, $K = 2 \dots 3$).

Если в уравнениях Герца, приводимых автором, положить, что напряжение при столкновении i -го и j -го шаров $\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \sigma \rangle$, сила взаимодействия шаров $f_{ij} = f$, радиус контактной площадки $r_{ij} = r_0$, сумма обратных радиусов шаров $L_i + L_j = \kappa$, сумма упругих податливостей $\theta_i + \theta_j = 2\theta$ (материал шаров одинаков), приходим к

$$\langle \sigma \rangle = \frac{f}{\pi r_0^2} = r_0 \frac{f}{\pi r_0^3} = \frac{8}{3\pi} \kappa \frac{r_0}{\theta}, \quad (13)$$

т. е. получаем формулу (12) с коэффициентом $K = \frac{16}{3\pi} = 1,7$. Таково должно быть значение коэффициента K согласно Герцу. Ввиду особой значимости этого коэффициента (чем он ниже, тем при более высоких скоростях столкновения начинается пластическая деформация) мы оставляем за собой некоторую свободу и делаем этот коэффициент плавающим параметром модели.

Заметим, что согласно Герцу максимальное упругое напряжение в центре контактной площадки в 1,5 раза превышает среднее по площадке напряжение, т. е. предположение о равномерности распределения упругих напряжений по площадке довольно-таки хорошо оправдано.

Попытаемся обобщить формулу (12) на случай гетерогенного материала (шара, покрытого слоем порошка), когда упругие напряжения проникают в шар, т. е. при $1,3r_0 > h$. Примем "псевдогерцевское" приближение:

$$\langle \sigma \rangle_{\text{упруг}} = \frac{K\kappa}{1,3 \cdot 2} \left(\frac{h}{\theta_p} + \frac{1,3r_0 - h}{\theta_b} \right) \quad \text{при } 1,3r_0 > h, \quad (14)$$

где $\theta_b = \frac{4(1 - \nu_b^2)}{E_b}$, ν_b , E_b — упругая податливость, коэффициент Пуассона и модуль Юнга для шара (стенки). Заметим, что при $\theta_p = \theta_b$ или при $r_0 \gg h$ (14) перейдет в (12) с заменой θ_p на θ_b . При этом в приближении одноосного напряженного состояния упругая энергия, запасен-

ная в шаре и в полуслое примыкающего к нему порошка,

$$U_{\text{упруг}} = \frac{\pi r_0^2 \cdot 1,3r_0}{2E_p} \langle \sigma \rangle_{\text{упруг}}^2 \quad \text{при } 1,3r_0 < h; \quad (15)$$

$$U_{\text{упруг}} = \frac{\pi r_0^2}{2} \langle \sigma \rangle_{\text{упруг}}^2 \left(\frac{h}{E_p} + \frac{1,3r_0 - h}{E_b} \right) \quad \text{при } 1,3r_0 > h. \quad (16)$$

Полная упругая энергия в слое порошка толщиной $H = 2h$ и в двух соударяющихся шарах или в шаре и стенке вдвое больше. Упругий предел скоростей столкновения может быть определен из условия $\langle \sigma \rangle_{\text{упруг}} = H_V$ и равенства кинетической энергии шара упругой энергии. Если упругий предел достигается при $1,3r_0 < h$, то из (12), полагая максимальный радиус упругой площадки $r_e = r_0$ (e — elastic), получим

$$r_e = \frac{2H_V \theta_p}{Km} R_b, \quad (17)$$

и на основе уравнения (15) имеем

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{v_e}{m} \right)^2 = \frac{\pi r_e^2 1,3r_e}{2E_p} H_V^2 \frac{2}{m}, \quad (18)$$

где было принято $\kappa = \frac{m}{R_b}$ при $m = 2$ для удара шар-шар и $m = 1$ для удара шар-стенка, т. е. m — число шаров, участвующих в столкновении. Из (18) и (17) следует, что упругий предел скорости столкновения v_e (для удара шар-шар это относительная нормальная скорость двух шаров) равен

$$v_e = \frac{c_V}{m} \left(\frac{H_V}{E_p} \right)^2 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 1,3 \left(\frac{8}{K} \right)^3 (1 - \nu_p^2)^3}. \quad (19)$$

Уравнение (19) применимо при

$$\frac{1,3r_e}{h} = \frac{1,3 \cdot 24f(1 - \nu_p^2)}{Km\delta} \frac{H_V}{E_p} < 1. \quad (20)$$

Выражение (20) получено с использованием (17) и соотношения (1), где δ — отношение объемов порошка и шаров ($\delta \sim 0,1$).

Если неравенство (20) не выполняется, т. е. упругий предел скоростей столкновения достигается, когда упругие напряжения выходят за

пределы слоя порошка и проникают внутрь шаров и стенки барабана, максимальный радиус упругой контактной площадки $r_0 = r_e$ должен определяться на основе уравнения (14) при $\langle \sigma \rangle_{\text{упруг}} = H_V$, т. е.

$$r_e = \frac{2H_V\theta_b}{Km}R_b + \frac{h}{1,3} \left(1 - \frac{\theta_b}{\theta_p}\right). \quad (21)$$

В соответствии с (16) при $1,3r_e > h$ вместо (18) следует записать:

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{v_e}{m}\right)^2 = \frac{\pi r_e^2}{2} H_V^2 \left(\frac{h}{E_p} + \frac{1,3r_e - h}{E_b}\right) \frac{2}{m}. \quad (22)$$

При скоростях соударений $v \leq v_e$ пластическая деформация не начинается, никаких изменений в обрабатываемом порошке не происходит и никакого вклада в механические частоты ν_0, ν_1, ν_2 такие соударения не дают. Этот вывод справедлив в предположении, что пластическая деформация и при касательном ударе инициируется лишь в том случае, если нормальные напряжения превосходят H_V , вследствие чего материал переходит в состояние вязкой жидкости. Однако, хотя нормальный удар при $v \leq v_e$ предполагается абсолютно упругим, частичная потеря кинетической энергии шарами при столкновениях имеет место, и как раз из-за касательных ударов и отличного от нуля коэффициента трения.

Как было сказано выше, контактные площадки $S_0 = \pi r_0^2$ и времена ударов t_0 важны для расчета теплоотвода от шаров к стенке барабана. При упругих ударах величины S_0 и t_0 рассчитывались следующим образом. Во-первых, определялась скорость упругого соударения шара со стенкой v_0 , при которой упругие напряжения охватывали весь слой порошка, но не проникали в шар и стенку.

Скорость v_0 находилась из уравнения $\frac{M}{2}v_0^2 = U_{\text{упруг}}$, где $U_{\text{упруг}}$ вычислялось согласно (15), а $\langle \sigma \rangle_{\text{упруг}}$ — согласно (12) при $\kappa = 1/R_b$ (т. е. при $m = 1$), а, кроме того, полагалось $1,3r_0 = h$. В результате для скорости упругого соударения шара со стенкой получили выражение:

$$v_0 = c_{\parallel} \frac{K\sqrt{\frac{3}{2}}}{8(1 - \nu_p^2) \cdot 1,32} \left(\frac{h}{R_b}\right)^{5/2}. \quad (23)$$

Вообще же, как видно из (15) и (12), при $1,3r_0 < h$ упругая энергия $U_{\text{упруг}} \sim r_0^5 \sim x^{5/2}$, по-

скольку упругая усадка шара $x = \frac{r_0^2}{2R_b}$. Отсюда скорость движения шара $v(x)$ при $v \leq v_0$ (v — начальная скорость шара до столкновения)

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{5/2}}, \quad \text{где}$$

$$x_0 = x_h \left(\frac{v}{v_0}\right)^{4/5};$$

$$S_0 = \pi r_0^2 = 2\pi R_b x_0;$$

$$t_0 = 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{v(x)} = \frac{2x_0}{v_0} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - y^{5/2}}} = 2,94 \frac{x_0}{v_0};$$

$$x_h = \frac{h^2}{1,3^2 \cdot 2R_b} \text{ — упругая усадка порошка, при}$$

которой упругие напряжения проникают на глубину h . Заметим, что этот расчет выполнялся в герцевском, а не "псевдогерцевском" приближении. Время удара $t_0 \sim K^{-0,8} \frac{R_b}{c_{\parallel}^{0,8} \nu^{0,2}}$, что соответствует герцевскому приближению.

При скоростях удара $v_0 < v \leq v_e$ упругие напряжения выходят из слоя порошка и проникают в шар и стенку, так как в этом случае

$$1,3r_0 > h. \text{ Если ввести переменную } u = \frac{1,3r_0}{h} - 1,$$

то из (16) и (14) вытекает

$$U_{\text{упруг}}(u) = U_{\text{упруг}}(0)(1 + uA)^2(1 + uB)(1 + u)^2, \quad (25)$$

где $U_{\text{упруг}}(u) = \frac{M}{2}v^2$; $U_{\text{упруг}}(0) = \frac{M}{2}v_0^2$; $A = \theta_p/\theta_b$; $B = E_p/E_b$ (предположительно $A > 1$, $B < 1$, $A \approx 1/B$). Отсюда

$$R = \frac{v}{v_0} = (1 + uA)(1 + u)\sqrt{1 + uB}. \quad (26)$$

Это уравнение решалось итерационно по схеме:

$$u^{(i+1)} = \sqrt{[R^{(i)} - 1]a + b^2} - b,$$

где $a = \frac{1}{A}$; $b = \frac{1+a}{2}$; $R^{(i)} = \frac{R}{\sqrt{1 + bu^{(i)}}}$; $u^{(0)} = 0$.

Решением уравнения (26) является $u = u_0$.

Поскольку упругая усадка $x = \frac{r_0^2}{2R_b} = x_h(1 + u)^2$,

то скорость шара

$$v(x) = \sqrt{v^2 - v_0^2(1 + Au)^2(1 + Bu)(1 + u)^2}, \quad (28)$$

где $u = \sqrt{\frac{x}{x_h}} - 1$. Время упругого удара при $v > v_0$

$$t_0 = 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{v(x)} = 2 \frac{x_h}{v_0} \int_0^{(1+u_0)^2} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - F(y)}}, \quad (29)$$

где

$$y = \frac{x}{x_h}; \quad (30)$$

$$F(y) = \begin{cases} y^{5/2} & \text{при } y \leq 1; \\ (1 + Au)^2(1 + u)^2(1 + Bu), & \\ u = \sqrt{y} - 1 & \text{при } y > 1. \end{cases} \quad (31)$$

Максимальная упругая усадка $x_0 = x_h(1 + u_0)^2$, максимальная площадь контактной площадки

$$S_0 = \pi r_0^2 = 2\pi R_b x_0 = 2\pi R_b x_h(1 + u_0)^2. \quad (32)$$

Эти значения t_0 и S_0 учитывались при теплопередаче шар-стенка для упругих ударов со скоростями $v_0 < v \leq v_e$. Время удара t_0 в (29) рассчитывалось численным интегрированием.

При скоростях ударов $v > v_e$ включается пластическая деформация и начинается обработка ("пережевывание") порошка на контактных площадках, радиус которых r_0 начинает превышать максимальный радиус упругой контактной площадки r_e (рис. 2). При этом возникают нормальные пластические смещения в компактированном порошке величиной

$$u(r) = \begin{cases} x_0[1 - (r/r_0)^2] - x_e[1 - (r/r_e)^2], & r \leq r_e; \\ x_0[1 - (r/r_0)^2], & r_e < r \leq r_0, \end{cases} \quad (33)$$

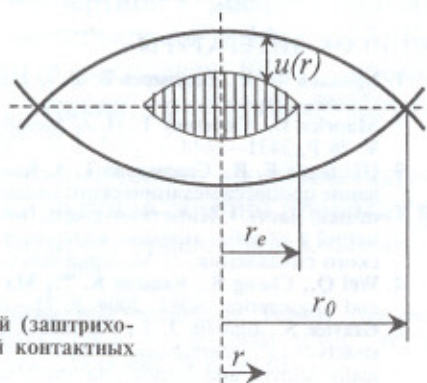


Рис. 2. Схема упругой (заштрихована) и пластической контактных "лизов" и площадок

где $x_0 = \frac{r_0^2}{2R_b}$; $x_e = \frac{r_e^2}{2R_b}$. Отсюда

$$u(r) = \begin{cases} \frac{r_0^2 - r_e^2}{2R_b}, & r \leq r_e; \\ \frac{r_0^2 - r^2}{2R_b}, & r_e < r \leq r_0. \end{cases} \quad (34)$$

В пластической области упругая энергия на один шар равна

$$U_{\text{упруг}} = \begin{cases} \frac{\pi r_0^2 \cdot 1,3r_0}{2E_p} H_V^2 \frac{2}{m} & \text{при } 1,3r_0 < h; \\ \frac{\pi r_0^2}{2} H_V^2 \left(\frac{h}{E_p} + \frac{1,3r_0 - h}{E_b} \right) \frac{2}{m} & \\ \text{при } 1,3r_0 > h. \end{cases} \quad (35)$$

Работа пластической деформации на один шар равна произведению H_V на объем пластической лунки в порошке, оставляемой одним шаром, т. е.

$$U_{\text{пласт}} = H_V \pi \frac{r_0^4 - r_e^4}{4R_b}. \quad (36)$$

Конечный радиус упругопластической контактной площадки r_0 определяется из условия:

$$\frac{M}{2} \left(\frac{v}{m} \right)^2 = U_{\text{упруг}}(r_0) + U_{\text{пласт}}(r_0). \quad (37)$$

В случае $1,3r_0 > h$ в безразмерных координатах $y = x/R_b$, $u = v/c_0$, где $c_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} c_V$, уравнение движения шара принимает вид:

$$u_0^2 - u^2(y) = y^2 + By^{3/2} + Cy, \quad (38)$$

где $B = \sqrt{2} \frac{H_V}{E_b} 1,3 \frac{2}{m}$; $C = \left(\frac{H_V}{E_p} - \frac{H_V}{E_b} \right) \frac{h}{R_b} \frac{2}{m}$;

$u_0^2 = u^2 + y_e^2$; $y_e = \frac{x_e}{R_b} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{R_b} \right)^2$; u — исходная скорость шара. Уравнение (38) для точки останова шара y_0 , в которой $u(y_0) = 0$, решается численно (итерационно, а в случае расхождения процесса — делением отрезка пополам). Решением этого уравнения является глубина лунки y_0 , тогда как максимальный радиус контактной площадки $r_0 = R_b \sqrt{2y_0}$, а ее площадь $S_0 = \pi r_0^2 = 2\pi R_b^2 y_0$.

Время упругопластического удара $t_0 = t_{e1} + t_p + t_{e2}$, где t_{e1} и t_{e2} — времена упругих этапов удара (прямой и обратный ход); t_p — время пластической стадии удара. Поскольку t_{e1} слабо зависит от скорости v (примерно $t_{e1} \sim v^{-0,2}$), то принималось, что t_{e1} приблизительно равно половине времени (29) при $R = v_e/v_0$. Далее

$$t_p = \frac{R_b}{c_0} \int_{y_e}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{u_0^2 - y^2 - By^{3/2} - Cy}}. \quad (39)$$

Этот интеграл при каждом пластическом ударе рассчитывается численно.

При ударе шар-шар каждый из шаров во время отскока отталкивается от центра масс системы слоем упруго сжатого порошка толщиной h и упруго сжатым поверхностным слоем самого шара толщиной $1,3r_0 - h$. При ударе шар-стенка толщины упруго сжатых слоев порошка и мелющих тел удваиваются. Жесткости этих соединенных последовательно "пружин"

(рис. 3) длиной $\frac{2}{m}h$ и $\frac{2}{m}(1,3r_0 - h)$ равны соответственно E_p и E_b , а упругие усадки — x_1 и x_2 , тогда как полное смещение шара $x = x_1 + x_2$. Сила сжатия "пружин" одинакова, т. е. $E_p \frac{x_1}{h} = E_b \frac{x_2}{1,3r_0 - h}$. Поскольку пластическая

контактная площадка πr_0^2 во время упругого отскока сохраняется, то уравнение движения шара при отскоке $E_p \frac{x_1}{h} \pi r_0^2 = -M\ddot{x}$, т. е. $\ddot{x} = -\omega^2 x$, где

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi r_0^2}{M \left(\frac{h}{E_p} + \frac{1,3r_0 - h}{E_b} \right) \frac{2}{m}}}, \quad (40)$$

а время упругого отскока $t_{e2} = \pi/(2\omega)$. Рассчитанные выше значения S_0 и t_0 фигурируют в разделе о контактном теплоотводе.

Заметим, что если выполняется условие (20), т. е. упругие напряжения достигают значения H_V , не выходя за пределы слоя порошка (не проникая в шар и стенку), то при значениях $r_e < r_0 \leq h/1,3$, где r_e определяется (17), уравнение движения шара (38) следует заменить на

$$u_0^2 - u^2(y) = y^2 + Dy^{3/2}, \quad (41)$$

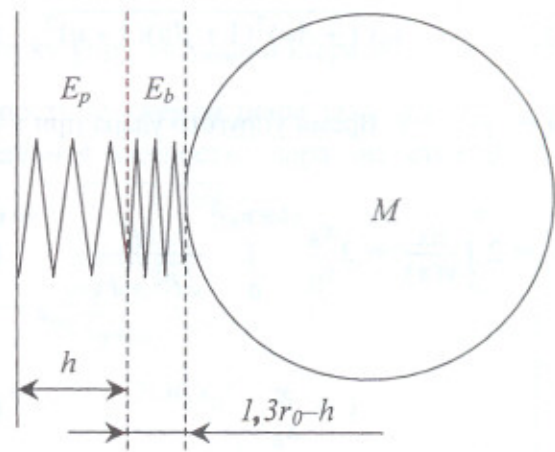


Рис. 3. Схема двух "пружин", поясняющая упругий отскок шара в случае столкновения двух шаров

где $D = \sqrt{2} \frac{H_V}{E_p} \cdot 1,3 \frac{2}{m}$, и лишь при $r_0 > h/1,3$ станет справедливым (38).

Соответственно, и уравнение (39) примет вид:

$$t_p = \frac{R_b}{c_0} \left[\int_{y_e}^{y_h} \frac{dy}{\sqrt{u_0^2 - y^2 - Dy^{3/2}}} + \int_{y_h}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{u_0^2 - y^2 - By^{3/2} - Cy}} \right], \quad (42)$$

где $y_h = x_h/R_b$. Если же $y_0 \leq y_h$, то

$$t_p = \frac{R_b}{c_0} \int_{y_e}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{u_0^2 - y^2 - Dy^{3/2}}}. \quad (43)$$

Время упругого отскока в последнем случае равно $t_{e2} = \pi/(2\omega)$, где

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi r_0^2}{M \frac{1,3r_0 - h}{E_p} \frac{2}{m}}}. \quad (44)$$

(Окончание II ч. следует)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уракаев Ф. Х., Болдырев В. В. // Неорг. матер. 1999. Т. 35. С. 248–256.
2. Maurice D., Courtney T. H. // Metall. Mater. Trans. A. 1995. V. 26 P. 2431–2444.
3. Шелехов Е. В., Свиридова Т. А. Компьютерное моделирование процесса механического сплавления в шаровых мельницах. Часть I. Кинетико-статистическая геометрия изменений в обрабатываемом материале в процессе механического сплавления. // Материаловедение. 2007. № 9, 10.
4. Wei Q., Cheng S., Ramesh K. T., Ma E. // Materials Science and Engineering. A381. 2004. P. 71–79.
5. Gravier S., Blandin J. J., Pelletier J. M., Doisneau B. // Abstracts of 13th International Symposium on Metastable, Mechanically Alloyed and Nanocrystalline Materials. 2006. P. 88.